# 3.5. BÖLÜNMÜŞ RASTGELE VEKTÖRLER İÇİN ORTALAMA VEKTÖRLERİ VE KOVARYANS MATRİSLERİ

$$v = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

olarak v vektörünü x ve y olarak iki alt kümeye bölelim.

Böylece, v içerisinde p+q tane rasgele değişken yer almaktadır. Bu durumda,

$$\mu = E(v) = E\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(y) \\ E(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Cov}(v) = \Sigma = \mathrm{cov}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{pmatrix}$$

olmaktadır. Burada $\Sigma_{xy} = \Sigma_{yx}'$ dir.

$$\Sigma_{yy} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{y_1} & \sigma_{y_1 y_2} & \cdots & \sigma_{y_1 y_p} \\ \vdots & - & - & \sigma_{y_2 y_p} \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{y_p y_1} & \sigma_{y_p y_2} & \cdots & \sigma^2_{y_p} \end{bmatrix}$$

$\Sigma_{yx}$ kovaryans matrisi ayrıca, $cov(y,x)$ şeklinde de gösterilebilir ve

$$\Sigma_{yx} = cov(y,x) = E\left[(y-\mu_y)(x-\mu_x)'\right]$$

olarak tanımlanabilir. Kovaryansın üç farklı gösterimi vardır. Bunlar;

1. $cov(y_i, y_j)$ → Sayısal gösterim
2. $cov(y)$ → Simetrik matris
3. $cov(y,x)$ → Dikdörtgensel matris

## 3.6. Rasgele Vektörlerin Doğrusal Fonksiyonları

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)'$ sabitlerden oluşan bir vektör olsun. Bu durumda, $\alpha$ terimlerini içeren doğrusal kombinasyon;

$$z = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_p y_p = \alpha' y$$

şeklinde yazılabilir.

$y$ bir rastgele vektör ise $z = a'y$ de rasgele bir değişkendir.

$$\mu_z = E(a'y) = a' E(y) = a'\mu \text{ 'dür.}$$

Yani;
$$\begin{aligned} E(a'y) &= E(a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_p y_p) \\ &= E(a_1 y_1) + \dots + E(a_p y_p) \\ &= a_1 E(y_1) + \dots + a_p E(y_p) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E(y_1) \\ E(y_2) \\ \vdots \\ E(y_p) \end{pmatrix}$$

$= a' \cdot E(y) = a'\mu$ olarak ifade edilir.

* $y$ rasgele bir vektör, $X$ rasgele bir matris, $a$ ve $b$ sabitlerden oluşan vektör ve $A$ ve $B$ sabitlerin matrisi olsun.

1. $E(Ay) = A \cdot E(y)$
2. $E(a'Xb) = a' E(X) b$
3. $E(AXB) = A E(X) B$

* $A$, $k \times p$ boyutlu sabitlerden oluşan bir matris; $b$, $k \times 1$ boyutlu sabitlerden oluşan bir vektör ve $y$, $p \times 1$ boyutlu rasgele vektör ise,

$$E(Ay + b) = A E(y) + b$$

Varyans – Kovaryans:

$z = a'.y$ tesadüfi değişkeninin varyansı. $V(z) = V(a'y) = a'.\Sigma.a$

$a$; $p\times 1$ sabitler vektörü, $y$; $p\times 1$ rastgele vektör, $\Sigma$ kovaryans matrisi olsun,

$E(y-\mu)^2$

$$V(z) = V(a'y) = E(a'.y - a'\mu)^2$$
$$= E[a'.(y-\mu)]^2$$
$$= E[a'.(y-\mu).a'.(y-\mu)]$$
$$= E[a'.(y-\mu).(y-\mu)'.a]$$
$$= a'.E[(y-\mu).(y-\mu)'].a$$
$$= a'.\Sigma.a \quad \text{bulunur.}$$

<u>$p=3$ için</u>

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$z = a'.y$

$$\Rightarrow V(a'.y) = V(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3.y_3) = a'.\Sigma.a$$

$$= (a_1 \ a_2 \ a_3)_{1\times 3} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}_{3\times 3} . \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$= [a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_{21} + a_3\sigma_{31} \quad a_1\sigma_{12} + a_2\sigma_2^2 + a_3\sigma_{32} \quad a_1\sigma_{13} + a_2\sigma_{23} + a_3\sigma_3^2] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$= a_1^2\sigma_1^2 + a_1a_2\sigma_{21} + a_1a_3\sigma_{31} + a_2.a_1.\sigma_{12} + a_2^2.\sigma_2^2 + a_2a_3.\sigma_{32} + a_3a_1\sigma_{13} + a_3a_2\sigma_{23} + a_3^2\sigma_3^2$$

$$= a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + a_3^2\sigma_3^2 + 2a_1a_2\sigma_{12} + 2a_1a_3\sigma_{13} + 2a_2a_3\sigma_{23}$$

<u>Sonuç:</u> a ve b; $p\times 1$ sabitlerden oluşan vektörler ise

$$Cov(a'y; b'y) = a'.\Sigma.b. \text{ olur.}$$

$z = A.y$, $w = B.y$ olsun. $A_{k\times p}$, $B_{m\times p}$ sabitler matrisi, $y_{p\times 1}$ rastgele vektör, ~~ile~~ $\Sigma$ kovaryans matrisi ile

1: $Cov(z) = Cov(A.y) = A.\Sigma A'$

2: $Cov(z, w) = cov(A.y, B.y) = A.\Sigma.B'$.

<u>Örnek:</u> $y = (y_1\ y_2\ y_3)'$ rastgele vektör olsun.

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, a.) $z = 2y_1 - 3y_2 + y_3$ için

$E(z)$, $V(z) = ?$

b.) $z_1 = y_1 + y_2 + y_3$, $z_2 = 3y_1 + y_2 - 2y_3$ için

$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ olsun. $E(z)$, $Cov(z) = ?$

<u>Çözüm:</u> a) $z = 2y_1 - 3y_2 + y_3$ t.d. için

$$E(z) = E(2y_1 - 3y_2 + y_3) = 2.E(y_1) - 3.E(y_2) + E(y_3)$$
$$= 2.1 - 3.(-1) + 3$$
$$= 2 + 3 + 3 = 8$$

$$V(Z) = V(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3) = a' \cdot \Sigma \cdot a$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \,_{//}$$

---

b) $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ iki bileşenli

$$\Rightarrow E(Z) = E\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1 + 3 \\ 3 - 1 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(y_1) + E(y_2) + E(y_3) \\ 3 \cdot E(y_1) + E(y_2) - 2 \cdot E(y_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} _{//}$$

$$\mathrm{Cov}(Z) = \mathrm{cov}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{z_1} & \sigma_{z_1 z_2} \\ \sigma_{z_2 z_1} & \sigma^2_{z_2} \end{bmatrix}$$

burada; $\sigma^2_{z_1} = V(z_1) = V(y_1 + y_2 + y_3)$

$$= a' \cdot \Sigma \cdot a$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 21 \,_{//}$$

$$\sigma^2_{z_2} = V(z_2) = V(3y_1 + y_2 - 2y_3)$$

$$= 3^2 \cdot V(y_1) + 1^2 \cdot V(y_2) + (-2)^2 \cdot V(y_3) + 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \sigma_{12} + 2 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot \sigma_{13} + 2 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot \sigma_{23}$$

$$= 9 \cdot 1 + 2 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 1 - 12 \cdot 0 - 4 \cdot 3$$

$$= 9 + 2 + 40 + 6 - 12 = 45 \,_{//}$$

$$\sigma_{z_1 z_2} = cov(z_1, z_2) = cov(A.y ; B.y)$$

$$= A . \Sigma . B'$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 6 + 6 - 26 = -14$$

---

Böylece varyans-kovaryans matrisi;

$$cov(z) = \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2 & \sigma_{z_1 z_2} \\ \sigma_{z_2 z_1} & \sigma_{z_2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -14 \\ -14 & 45 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.